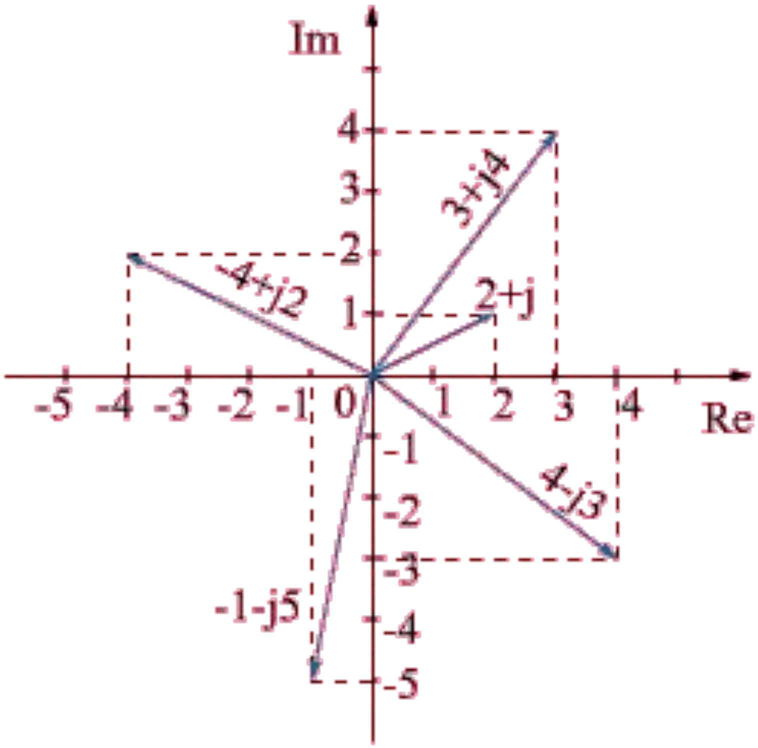
I NUMERI COMPLESSI

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica



Problema:

"Esiste la radice quadrata di un numero reale x negativo?"

$$\sqrt{(-4)} = ?$$

Nell'insieme dei numeri reali R il problema non ammette soluzione, perché:

"Non esiste nessun numero reale x che elevato al quadrato dia come risultato un numero negativo".

$$(-2)^2 = -4 \quad non \ \grave{e} \ vero$$

La domanda avrà soluzione se introduciamo un insieme numerico più ampio dell'insieme dei numeri reali R. Chiameremo questo insieme: **INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI C.**

FORMA ALGEBRICA NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi possono essere scritti nella seguente forma algebrica:

FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

$$\boxed{(a;b) = a + bi}$$

a=parte reale   bi=parte immaginaria   b=coeff. parte immaginaria

esempio

$$(2;3) = 2 + 3i$$

$$4i = 0 + 4i = (0;4)$$

$$5 = 5 + 0i = (5;0)$$

MODULO DEI NUMERI COMPLESSI

DEFINIZIONE

$$\boxed{|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

esempio

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

NUMERI COMPLESSI CONIUGATI E OPPOSTI

DEFINIZIONE

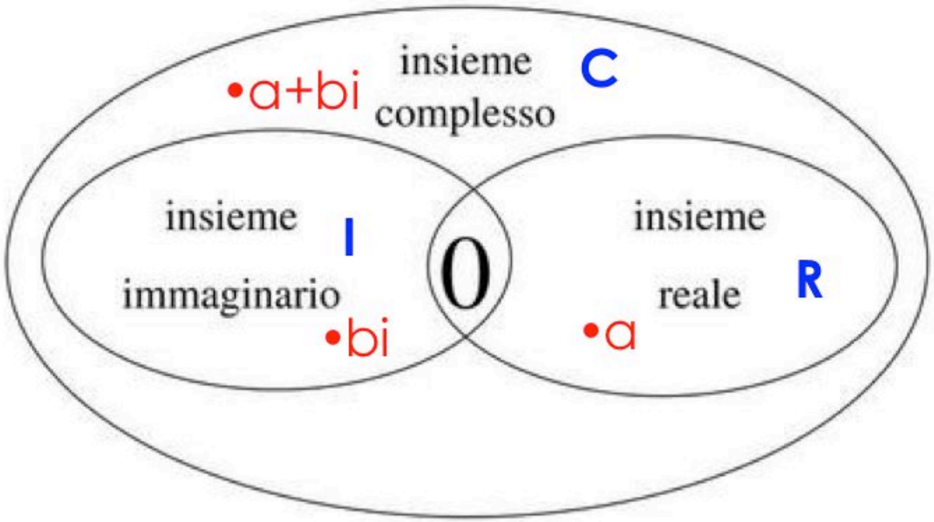
I numeri complessi a+bi e a-bi si dicono complessi coniugati. Mentre a+bi e –a-bi si dicono complessi opposti.

esempio

$$-4+3i \qquad -4-3i \qquad \textit{complessi coniugati}$$

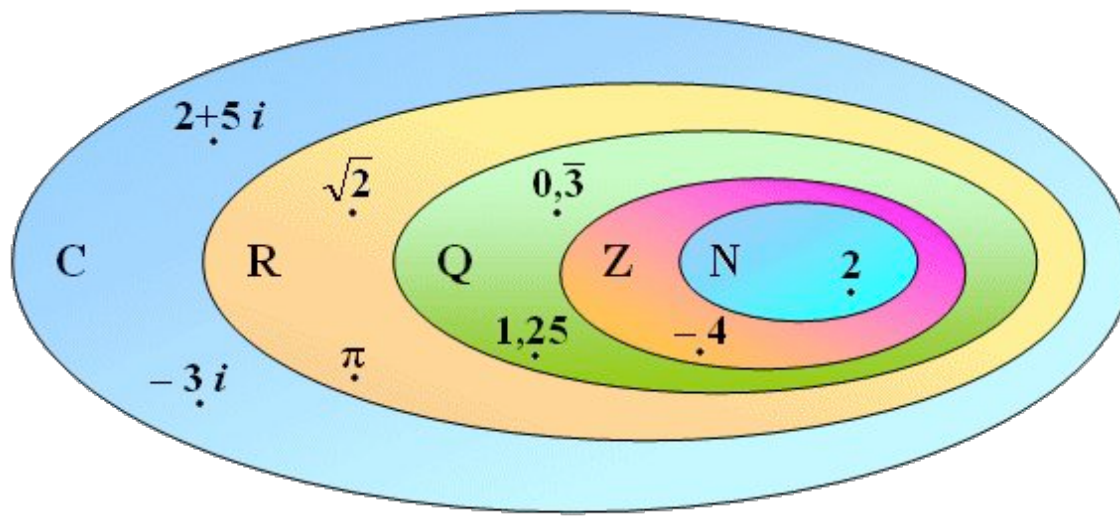
$$\sqrt{3}+4i \qquad -\sqrt{3}-4i \qquad \textit{complessi opposti}$$

L'INSIEME C DEI NUMERI COMPLESSI



L'insieme dei numeri complessi C, contiene due sottoinsiemi propri: R e I. Il numero 0 è considerato sia un numero reale che immaginario.

Gli insiemi finora studiati.



L'ALGEBRA DEI NUMERI IMMAGINARI

- LE QUATTRO OPERAZIONI

REGOLE

$$ai + bi = (a+b)i \qquad ai - bi = (a-b)i$$

$$ai \cdot bi = (a \cdot b)i^2 \xrightarrow{i^2=-1} ai \cdot bi = -a \cdot b$$

$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}$$

esempio

$$3i+6i=9i \qquad 5i-4i=i \qquad 4i-6i=-2i \qquad 10i-10i=0$$

$$2i\cdot 4i=-8 \qquad -2i\cdot 4i=+8 \qquad -2i\cdot(-4i)=-8$$

$$\frac{6i}{2i}=3 \qquad \frac{-6i}{2i}=-3 \qquad \frac{-6i}{-2i}=3$$

L’addizione e la sottrazione fra due numeri immaginari hanno come risultato ancora un numero immaginario, quindi (+;-) sono operazioni interne nell’insieme I.

La moltiplicazione e la divisione fra due numeri immaginari hanno come risultato un numero reale, quindi (•,:) sono operazioni esterne nell’insieme I.

LE POTENZE

REGOLE

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i \qquad i^6 = i^5 \cdot i = -1 \qquad i^7 = i^6 \cdot i = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = 1$$

$$i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r \xrightarrow{i^4=1;\ 1^k=1} i^n = i^r$$

Le potenze sono cicliche di periodo 4.

Le potenze con esponente pari valgono 1 o -1; quelle con esponente dispari valgono i o –i.

esempio

$$(7i)^2 = 49i^2 = -49 \qquad (-3i^2)^3 = -27i^6 = -27 \cdot (-1) = 27$$

$$\left(\sqrt{2}i\right)^2 = 2i^2 = -2 \qquad i^{14} = (i^4)^3 \cdot i^2 = 1^3 \cdot (-1) = -1$$

L'ALGEBRA DEI NUMERI COMPLESSI

REGOLA

La somma (sottrazione) di due numeri complessi è un numero complesso che ha: per parte reale la somma (sottrazione) delle pareti reali; per coefficiente della parte immaginaria la somma (sottrazione) dei coefficienti delle parti immaginarie:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

esempio

$$(4+2i)+(5+3i)=(4+5)+(2+3)i=9+5i$$

$$(4-2i)+(5+3i)=(4+5)+(-2+3)i=9+i$$

$$(12-7i)-(4+2i)=12-7i-4-2i=8-9i$$

$$(6-i)+(6+i)=12 \qquad (-5+4i)+(5-4i)=0 \qquad (2-15i)-(2+15i)=-30i$$

REGOLA

Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso dato da:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

esempio

$$(1-3i)\cdot(2-i)\xrightarrow[\textit{tra due binomi}]{\textit{prodotto}}2-i-6i+3i^2\xrightarrow{i^2=-1}-1-7i$$

$$(6+7i)\cdot(6-7i)\xrightarrow[\textit{notevole}]{\textit{prodotto}}36-49i^2\xrightarrow{i^2=-1}36+49=85$$

REGOLA

La divisione tra due numeri complessi è un numero complesso dato da:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

esempio

$$\frac{3-2i}{4+i} \xrightarrow{\text{equivalente a}} \frac{3-2i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{12-3i-8i-2}{16+1} = \frac{10-11i}{17} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i$$

REGOLA

Quadrato e cubo di un numero complesso:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$$

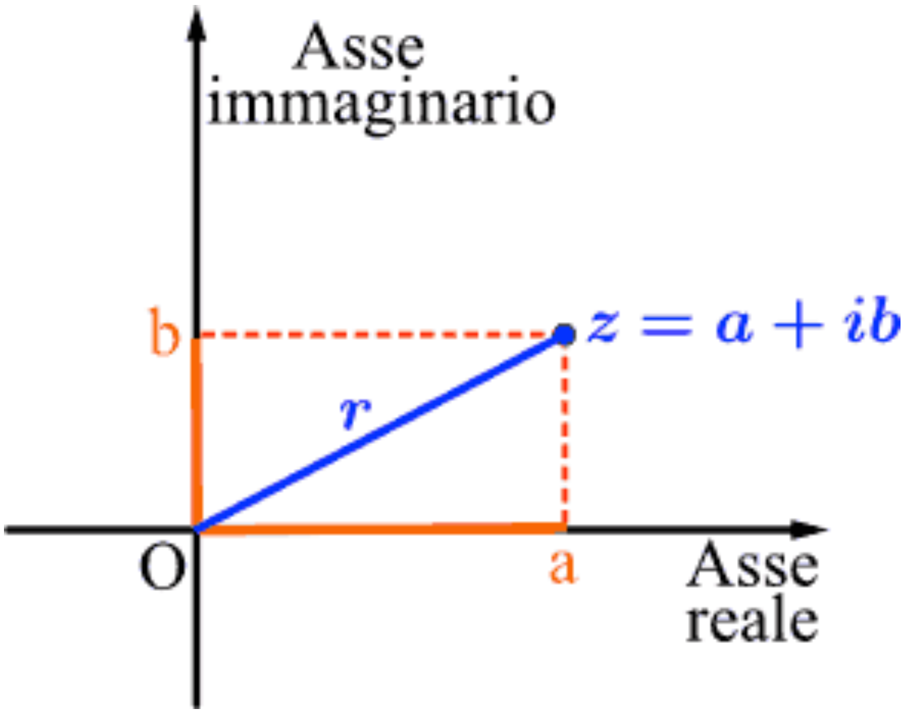
esempio

$$(3+2i)^2 \xrightarrow[\text{quadrato binomio}]{\text{regola}} 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$$

$$(3+2i)^3 \xrightarrow[\text{cubo binomio}]{\text{regola}} 27 - 8i + 54i - 36 = -9 + 46i$$

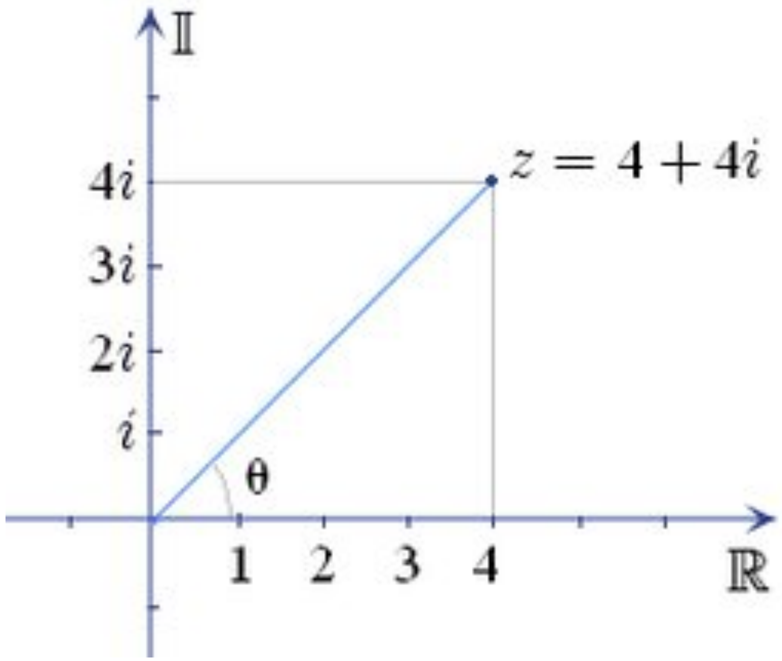
Piano di Gauss

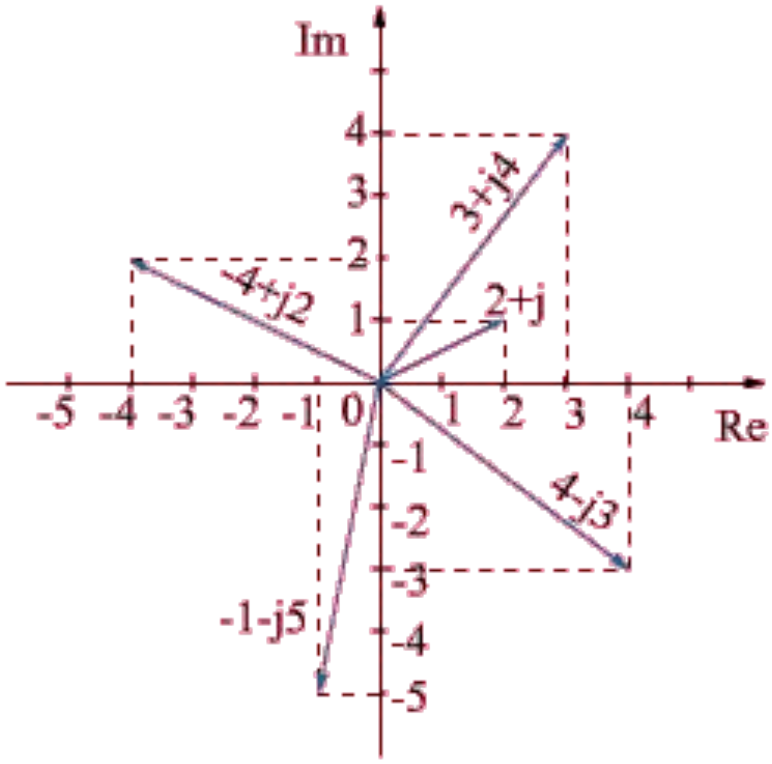
Poiché abbiamo definito un numero complesso come una coppia ordinata (a,b) di numeri reali, allora è possibile associare a ogni numero complesso un punto P(a;b) su un piano cartesiano, e viceversa.



Sul **piano di Gauss** abbiamo creato una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano.

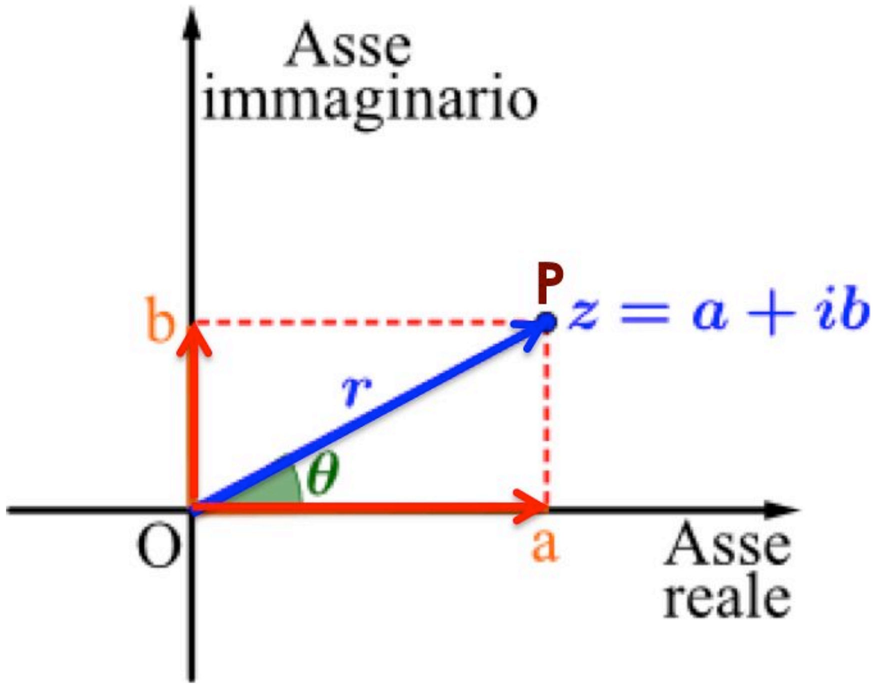
esempio





I vettori

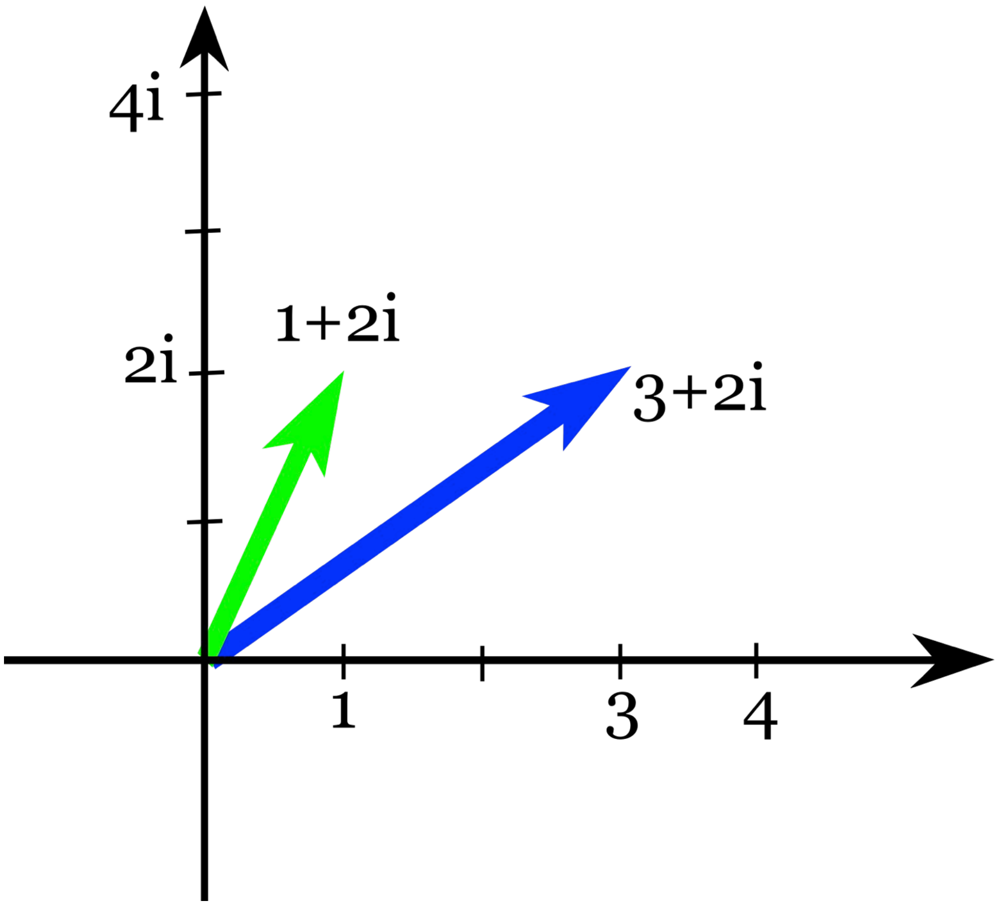
Dato un vettore, è sempre possibile disegnarlo nel piano cartesiano



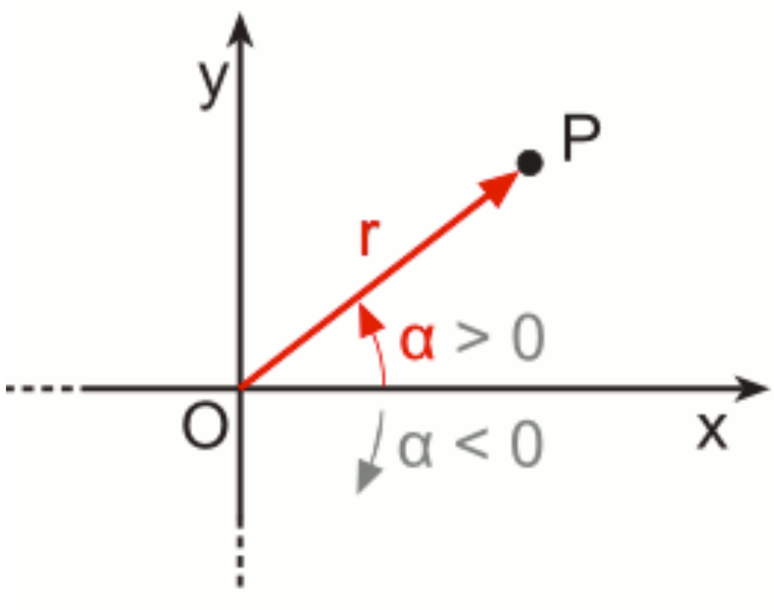
Le coordinate del punto P(a;b) rappresentano le componenti del vettore.

Poiché a ogni punto P del piano è associato uno e un solo vettore, esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i vettori del piano di Gauss.

esempio



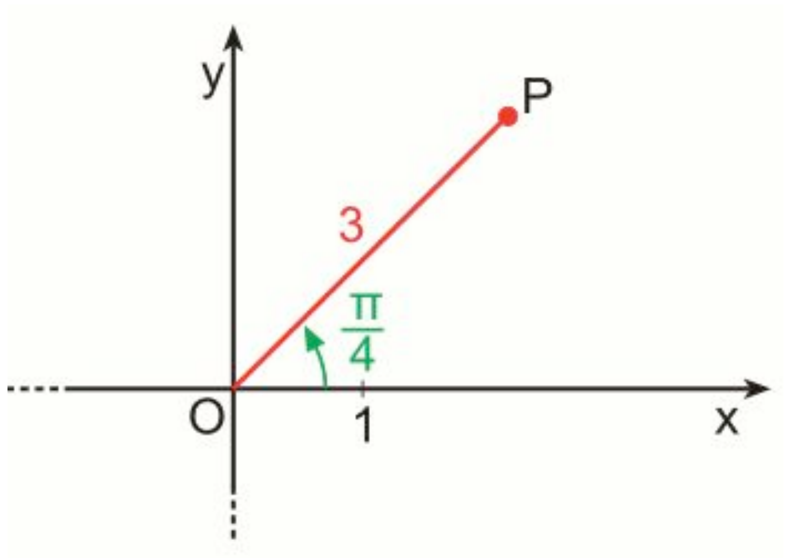
Ogni punto del piano può essere individuato, oltre che dalle coordinate cartesiane P(a;b), anche dalle coordinate polari P(**r**;**α**).



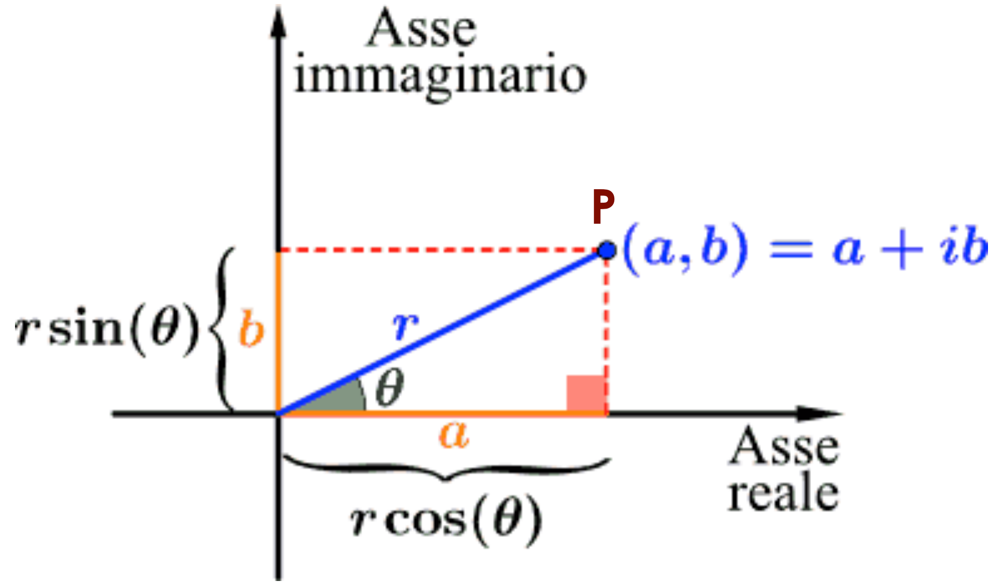
r (modulo)=lunghezza segmento OP
α (argomento)=angolo orientato

esempio

Rappresentazione del punto P(3;**π**/4) in coordinate polari.



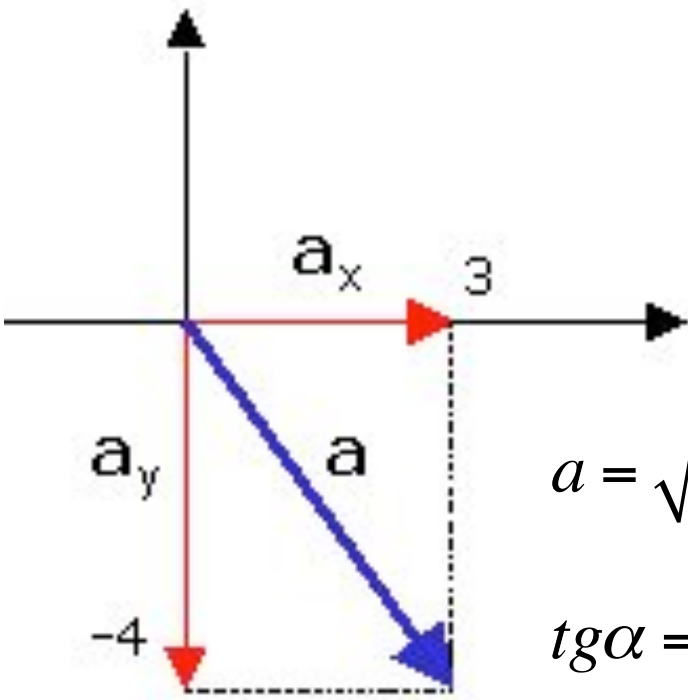
Conoscendo le coordinate polari di un punto $P(r;\theta)$, si possono ricavare le sue coordinate cartesiane $P(x;y)$ e viceversa.



Coordinate cartesiane (componenti del vettore)	Modulo (intensità del vettore)	Argomento (angolo del vettore)
$x = r \cdot \cos\theta$ $y = r \cdot sen\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$tg\theta = \frac{y}{x}$ $\theta = arctg\theta$

Esempio

Determinare le coordinate polari (modulo e argomento) del vettore dato in coordinate cartesiane **a**=(3;-4).

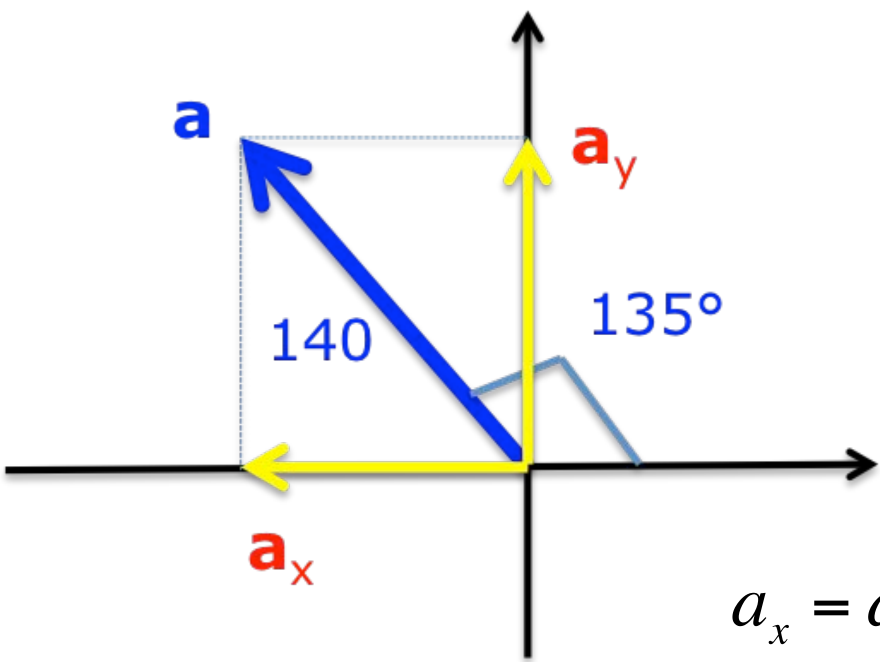


$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$tg\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-4}{3} = -1,33 \xrightarrow{calcolatrice} \alpha \cong -53°$$

Esempio

Determinare le coordinate cartesiane (x;y) (componenti del vettore) del vettore dato in coordinate polari **a**=(140;135°).



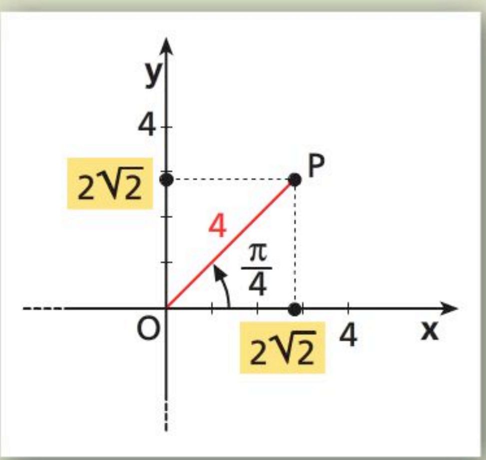
$$a_x = a \cdot \cos\theta = 140 \cdot \cos 135° = -99\,N$$

$$a_y = a \cdot sen\theta = 140 \cdot sen 135° = 99\,N$$

Esercizio: Trasformare le coordinate polari del punto P(4; π /4) in coordinate cartesiane

ESERCIZIO GUIDA

Trasformiamo le coordinate polari di $P\left[4; \frac{\pi}{4}\right]$ in coordinate cartesiane.



Le formule di trasformazione in coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x_P = r\cos\alpha \\ y_P = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Pertanto: $x_P = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $y_P = 4\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Il punto P ha coordinate cartesiane $(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

Esercizio: Trasformare in coordinate polari le coordinate cartesiane del punto P(-3√2;3√2).

ESERCIZIO GUIDA

Trasformiamo in coordinate polari le coordinate cartesiane del punto $Q(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$.

Le formule di trasformazione sono:

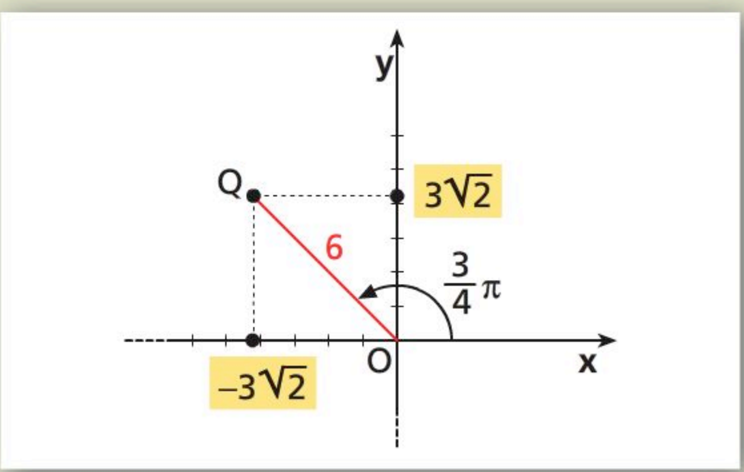
$$r=\sqrt{x_Q^2+y_Q^2},\ \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y_Q}{x_Q}.$$

Calcoliamo r:

$$r=\sqrt{(-3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{18+18}=\sqrt{36}=6.$$

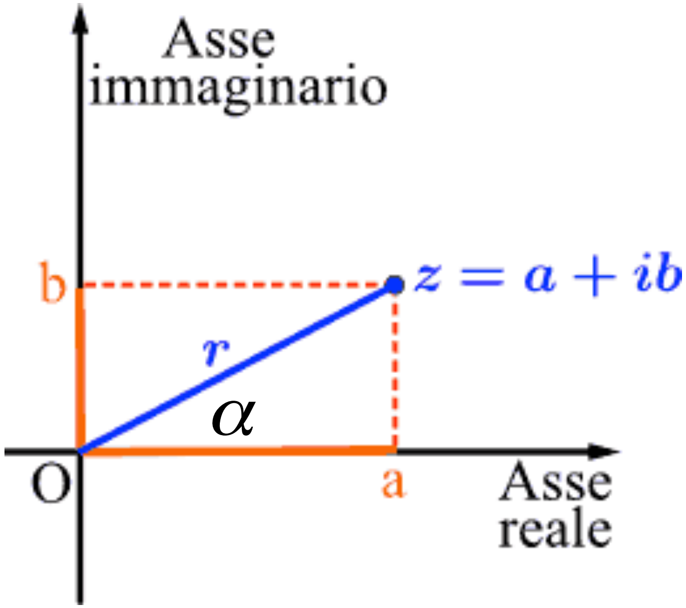
Calcoliamo α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}}=-1 \quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{3}{4}\pi+k\pi.$$



Poiché ci troviamo nel secondo quadrante, scegliamo $\alpha=\frac{3}{4}\pi$ e otteniamo: $\left[6;\frac{3}{4}\pi\right]$.

NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA



Sul **piano di Gauss** abbiamo visto che esiste una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano.

Poiché valgono le relazioni: $x = r \cdot \cos\alpha$ $\quad y = r \cdot sen\alpha$

allora:

$$\boxed{\begin{array}{l} z = a + ib = r(\cos\alpha + i sen\alpha) \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad tg\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}}$$

numeri complessi in forma trigonometrica

operazioni

REGOLA

Il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli dei numeri dati e per argomento la somma degli argomenti:

$$z_1 = r(\cos\alpha + isen\alpha) \qquad z_2 = s(\cos\beta + isenb)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = r \cdot s \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)\right]$$

esempio

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right) \qquad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

REGOLA

Il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli dei numeri dati e per argomento la differenza degli argomenti:

$$z_1 = r(\cos\alpha + isen\alpha) \qquad z_2 = s(\cos\beta + isenb)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta) + isen(\alpha-\beta)\right]$$

esempio

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{3}{4}\pi + isen\frac{3}{4}\pi\right) \qquad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3}\cdot\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

REGOLA

La potenza con esponente intero di un numero complesso in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha per modulo la potenza del modulo del numero dato e per argomento il prodotto dell'esponente per l'argomento del numero dato:

$$\boxed{\begin{aligned} & z = r(\cos\alpha + i sen\alpha) \\ & z^n = r^n \cdot (\cos n\alpha + i sen n\alpha) \qquad con\ n \in Z^+ \end{aligned}}$$

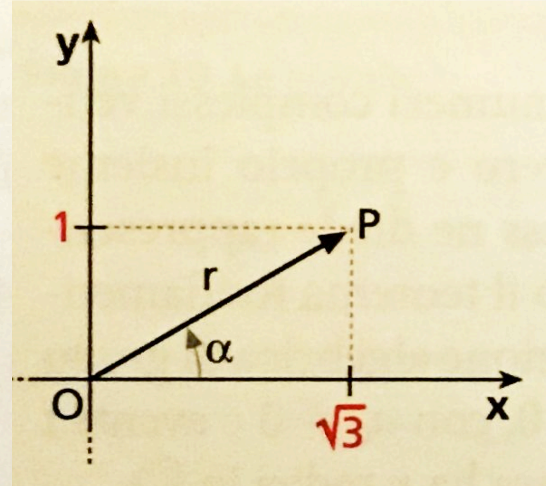
esempio

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z^5 = \left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i sen\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5 = 2^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{2}{3}\pi\right) + i sen\left(5\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 32\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i sen\frac{10}{3}\pi\right)$$

ESEMPIO

Consideriamo il numero complesso $\sqrt{3}+i$.



Calcoliamo r e α:

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\rightarrow\quad\alpha_1=\frac{\pi}{6}\vee\alpha_2=\frac{7}{6}\pi.$$

Scegliamo $\alpha_1=\dfrac{\pi}{6}$ perché a e b sono positivi, quindi α appartiene al primo quadrante.

La forma trigonometrica del numero complesso $\sqrt{3}+i$ è:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right).$$

Esercizio: Calcolare il prodotto dei seguenti numeri complessi e scrivere il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + isen\frac{2}{3}\pi\right) \qquad z_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi\right)$$

Ricordiamo che, se $z_1 = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = rs[\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)],$$

quindi, essendo $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$, si ha:

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right).$$

Poiché $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$, sostituendo:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{3}[0 + i(-1)] = -\frac{1}{3}i.$$

Esercizio: Calcolare la divisione dei seguenti numeri complessi e scrivere il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{7}{4}\pi + isen\frac{7}{4}\pi\right) \qquad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$$

Se $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$, il loro quoziente è:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)].$$

In questo modo otteniamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi\right).$$

Per scrivere la soluzione in forma algebrica ricordiamo che $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Esercizio: Calcolare la seguente potenza:

$$z^5 = \left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i sen\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5$$

Se $z = r(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)$, possiamo applicare la formula di De Moivre:

$$[r(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \text{ sen } n\alpha).$$

Nel nostro caso è $n = 5$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \,\text{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5 = 2^5\left[\cos\left(5\frac{2}{3}\pi\right) + i \,\text{sen}\left(5\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 32\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i \,\text{sen}\frac{10}{3}\pi\right).$$

Essendo

$$\cos\frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2} \text{ e } \text{sen}\frac{10}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

la forma algebrica del risultato ottenuto è:

$$32\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{32}{2} - \frac{32\sqrt{3}}{2}i = -16 - 16\sqrt{3}\,i.$$

Esercizio: Calcolare la seguente potenza:

$$z^{-3} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3}$$

Sappiamo che, se $z = r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)$, allora $[r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^{-n} = \frac{1}{r^n}(\cos n\alpha - i\,\mathrm{sen}\, n\alpha)$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3} = \frac{1}{2^3}\left[\cos\left(3\frac{\pi}{6}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

In forma algebrica il risultato è:

$$\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}[0 - i(1)] = -\frac{1}{8}i.$$

RISOLUZIONE EQUAZIONI 2° GRADO IN C

Adesso abbiamo gli elementi per risolvere, nel campo dei numeri complessi, l'equazione posta all'inizio del capitolo:

$$x^2 = -4$$

Essendo: $$-4 = 4(\cos\pi + i\,sen\pi) \quad con\ r = 4\ e\ \alpha = \pi$$

grazie alla definizione della radice n-esima di un numero complesso, si ottiene:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right] \quad con\ k = 0,1$$

FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Abbiamo visto che un numero complesso può essere espresso nei seguenti due modi:

$$z = a + bi \quad forma\ algebrica$$

$$z = r(\cos\alpha + i sen\alpha) \quad forma\ trigonometrica$$

Ma c'è anche una terza forma. Si dimostra che:

$$forma\ esponenziale$$

$$z = re^{i\alpha}$$

$$formule\ di\ Eulero$$

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i sen\alpha \qquad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad sen\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Esercizio: Scrivere in forma algebrica il numero complesso dato in forma esponenziale $z=2e^{i\pi/6}$

Applichiamo la formula di Eulero:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i sen\alpha$$

Quindi:

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Esercizio: Scrivere in forma esponenziale il numero complesso dato in forma algebrica $z=-2\sqrt{3}+2i$

Trasformiamo la forma algebrica $a + bi$ in forma trigonometrica $r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Abbiamo $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, oppure $\alpha = \frac{11}{6}\pi$. Essendo $a < 0$ e $b > 0$, il punto corrispondente a $-2\sqrt{3} + 2i$ è nel secondo quadrante, quindi $\alpha = \frac{5}{6}\pi$. La forma trigonometrica del numero complesso $-2\sqrt{3} + 2i$ è:

$$4\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right).$$

Trasformiamo la forma trigonometrica in forma esponenziale $re^{i\alpha}$, dove $r = 4$ e $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, ossia:

$$4e^{i\frac{5}{6}\pi}.$$

Esercizio: Eseguire la moltiplicazione e la divisione tra i seguenti numeri complessi scritti in forma esponenziale:

$$z_1 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi} \qquad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Sfruttiamo la proprietà $re^{i\alpha} \cdot se^{i\beta} = r \cdot s \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$, tenendo conto che:

$$r = 5, \alpha = \frac{3}{4}\pi; s = 3, \beta = \frac{\pi}{6}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = 5e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 5 \cdot 3e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi\right)} = 15e^{i\frac{3\cdot 3\pi + 2\pi}{12}} = 15e^{i\frac{11}{12}\pi}.$$

Passiamo alla forma trigonometrica:

$$z_1 \cdot z_2 = 15\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11}{12}\pi\right).$$

Analogamente, per il quoziente sfruttiamo la proprietà $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3}e^{i\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi\right)} = \frac{5}{3}e^{i\frac{3\cdot 3\pi - 2\pi}{12}} = \frac{5}{3}e^{i\frac{7}{12}\pi} = \frac{5}{3}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{12}\pi\right).$$